

## **Hochleistung versus Hochbegabung im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II**

*Matthias Brandl*

### **Zusammenfassung**

Hinsichtlich integrierender oder inkludierender Unterrichtsverfahren stehen Lehrkräfte vor der Herausforderung, die Anforderungen von Minderheiten im Klassenverband zu berücksichtigen. Am gegenüberliegenden Ende des durch etwaige Behinderungen eingeschränkten Leistungsspektrums steht die Gruppe der hochleistenden Schülerinnen und Schüler. Hochleistung resultiert dabei aus dem synergetischen Zusammenwirken unterschiedlicher Faktoren zur Realisierung eines zugrunde liegenden Begabungspotentials, das als viables Konstrukt angesehen wird. Im Rahmen der hier dargestellten Studie wurden hochleistende Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe II in Bezug auf ihr Persönlichkeitsprofil, ihre Interessen, beliefs und Leistungen im Fach Mathematik hin untersucht. Zum Abgleich wurden zusätzlich Lehrer/innen-Interviews durchgeführt sowie historische empirische Daten verwendet. In der Gegenüberstellung zeigt sich ein spezifisches Auseinanderklaffen der Persönlichkeits- und Leistungsprofile mathematisch Hochleistender und potenziell mathematisch Begabter; u.a. erzielen die nach klassischen Merkmalen („Interesse“, „Ästhetik“, „Spielen“ und „Selbständig“) ausgewählten potenziell mathematisch begabten Schülerinnen und Schüler innerhalb der Hochleistungs-Stichprobe tatsächlich die höchsten Leistungswerte.

### **Theoretischer Rahmen**

Mathematische Begabung und eine daraus gegebenenfalls resultierende Hochleistung – hier im Fach Mathematik – repräsentieren zwei unterschied-

liche Enden eines kausalen Zusammenhangs. Das Modell aus Ulm (2010) wurde hierbei um einen systemtheoretischen Blickwinkel auf das Begabungspotential erweitert.

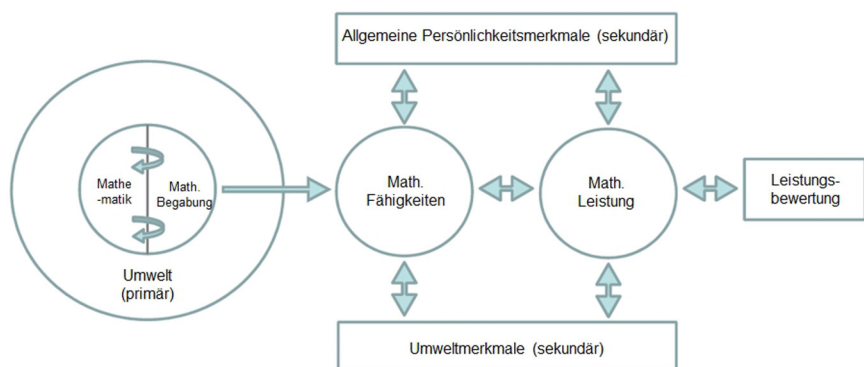


Abb. 1: Zusammenhang zwischen mathematischer Begabung und Leistung, entnommen aus Brandl (2011b, Abb. 1).

Im Rahmen eines Popperschen Falsifikationsansatzes widerspricht unter anderem Zimmermann der landläufigen Auffassung, dass mathematische Begabung eine fest umrissene fixe Eigenschaft sei, die man entweder hat oder nicht. Stattdessen können „unterschiedliche Vorstellungen über Mathematik nicht nur unterschiedliche mathematische Begabungen als Grundlage, sondern auch entsprechende Konzeptionen über mathematische Begabung zur Folge haben“ (Zimmermann 1992, 19). Diese sich an einem anthropologischen Ansatz (Sternberg 1996) orientierende Sichtweise lässt sich in eine systemtheoretische Sichtweise einbetten (Brandl 2011a). „Mathematische Begabung“ wird hierbei als *Konstrukt* angesehen, das aufgrund seiner strukturellen Kopplung an die sinnstiftende Umwelt „Mathematik“ und deren im historischen und kulturellen Kontext variierende Sichtweisen *viabel* ist. Diese systemtheoretische Viabilität spiegelt so die aus wissenschaftstheoretischer und psychologischer Sicht

geforderte Offenheit von Konstrukten wider (Brocke & Beauducel 2001).

Ob sich ein potenziell vorhandenes Begabungspotenzial erfolgreich in Form von hoher Leistung in einer speziellen Disziplin niederschlagen kann, hängt vom synergetischen Zusammenwirken weiterer Faktoren ab. Dazu zählen „Allgemeine Persönlichkeitsmerkmale“ wie z.B. Arbeits- u. Lernstrategien, Arbeits- und Lernmotivation, Konzentrationsfähigkeit, Stress- und Angstbewältigung, Kontrollüberzeugungen und „Sekundäre Umweltmerkmale“ wie z.B. die familiäre Lernumwelt, die Unterrichtsqualität, das Klassen- und Schulklima, die Peergroup, Kritische Lebensereignisse. Das komplexe Zusammenwirken dieser Faktoren hat Einfluss auf die Entwicklung (mathematischer) Fähigkeiten und auch auf die in einem entsprechenden sozialen System honorierte (mathematische) Leistung.

Bei Untersuchungen des Konstrukts „Mathematische Begabung“ in einem spezifischen Feld ist somit stets die em-

pirische Auseinandersetzung mit den dort verorteten Individuen notwendig, in deren Interaktion sich dieses viable Konstrukt konkret manifestiert.

## Fragestellung der Studie

Übergeordnetes Ziel der Studie war die kontrastierende Gegenüberstellung der an unterschiedlichen Polen verankerten Gruppen der hochleistenden und der potentiell begabten Schüler/innen-Gruppen (siehe Abbildung 1). Dies spiegelt sich in folgenden Fragestellungen wider:

- Welche Attribute manifestieren sich in einem bestimmten Feld (der Sekundarstufe II) für hochleistende und potentiell mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler aus Sicht der Lehrkräfte?
- Wie unterscheidet sich das Selbsteinschätzungs-Profil hochleistender Schülerinnen und Schüler (der Sekundarstufe II) von potentiell mathematisch begabten Schülerinnen und Schülern der historischen Vergleichsgruppe in Kießwetter (1992)?
- Welche Konsequenzen ergeben sich aus der Definition von Untergruppen in der Stichprobe hochleistender Schülerinnen und Schüler gemäß verschiedener typischer Klassifikationscharakteristika „Mathematischer Begabung“? Sind diese Gruppen einander und der historischen Vergleichsgruppe ähnlich, und falls ja, in welcher Hinsicht? Was lässt sich über deren Leistungsspektrum aussagen?

## Methodik und Stichprobe

Als empirisches Feld diente ein Hessisches Oberstufen-Internat für Hochleistende. Die dort zugelassenen Schü-

lerinnen und Schüler müssen ein rigides Auswahlverfahren durchlaufen (mindestens Note 2 in Kernfächern; mindestens Durchschnittsnote 2 in den letzten beiden Zeugnissen; mindestens ein allgemeiner IQ von 130 im Intelligenztest I-S-T 2000 R von Liepmann et al. (2007); erfolgreiche Teilnahme in einem zweitägigen Assessment-Center mit dem Fokus auf sozialen Kompetenzen).

Zum Abgleich mit den Selbsteinschätzungsprofilen potentiell begabter (und nicht zwingend hochleistender) Schülerinnen und Schüler wurden die historischen Ergebnisse einer empirischen Untersuchung von Teilnehmerinnen und Teilnehmern an forschungsorientierten Mathematik-Förderkursen in Hamburg („Hamburger Modell“) aus Kießwetter (1992) verwendet.

An dem Oberstufen-Internat standen für die Befragung mittels Fragebogen insgesamt 113 Schülerinnen und Schüler im Alter zwischen 14 und 18 Jahren (Durchschnitt 16 Jahre) aus den jeweils vier Klassen der 11. und 12. Jahrgangsstufe zur Verfügung. Der Median ihrer Mathematiknote im letzten Zeugnis waren 12 Punkte. Der Fragebogen gliederte sich in vier Kategorien: (I) Angaben zur Person, (II) Mathematikinteresse, (III) Bild von Mathematik und (IV) Selbsteinschätzung. In (II) wurden sowohl offene als auch geschlossene Antwortformate verwendet, in (III) und (IV) fünf- bzw. siebenstufige bipolare Likert-Skalen. Das Design in (IV) wurde identisch zum Fragebogendesign aus Kießwetter (1992) gestaltet, um vergleichbare Resultate zu erhalten.

Der Fragebogen wurde unter anderem durch problemzentrierte Einzelinterviews mit narrativen Einstiegen der

gesamten Mathematik-Fachgruppe des Internats (acht Lehrkräfte) ergänzt.

## Ergebnisse

Im Rahmen der Lehrkräfte-Interviews wurden hochleistende Schülerinnen und Schüler mit folgenden Worten beschrieben (Brandl 2011b, 2011c):

- *sind interessiert; sind in allen Fächern gut; wollen aktiv sein; sind motiviert (überwiegend intrinsisch); sind sehr pflichtbewusst;*
- *sind eher weniger unangepasst; sind sehr höflich, respektvoll, sensibel; sind sowohl auf der emotionalen als auch auf der kognitiven Ebene äußerst stur; eignen sich weniger als Angestellte;*
- *haben keine Scheu davor, selbständig zu arbeiten; können im Team arbeiten;*
- *setzen sich einem introjezierten Leistungsdruck aus; haben extreme Anforderungen an sich; sind resistent gegenüber psychischem Stress;*
- *wollen eine exakte, genau Behandlung mathematischer Themen im Unterricht; wollen im Unterricht nichts verpassen; sind lehrerorientiert; sind auf Sicherheit aus; wollen gute Klausuren schreiben.*

Dahingegen zeichnen sich mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler durch zusätzliche und andere Attribute aus (Brandl 2011b, 2011c):

- *besitzen mathematische Intuition, er-*

*ahnen den übergreifenden Gedankengang; sehen innermathematische Zusammenhänge;*

- *sind kreativ; interessieren sich für alternative Definitionen und die damit zusammenhängenden Konsequenzen; können querdenken; finden unerwartete Lösungen für Probleme;*
- *intensiveres ästhetisches Empfinden und Freude als bei anderen;*
- *sind mit hoch abstrakten Objekten zufrieden;*
- *zeigen Neugierde; sind das Gegenteil von brav.*

Alleine aus diesen Auflistungen ist eine deutliche Diskrepanz der qualitativ-beschreibenden Persönlichkeitsprofile der beiden Schüler/innen-Gruppen ersichtlich: während Wesensmerkmale der *Leistungsbereitschaft*, der *Anpassung*, des *Pflichtgehorsams* und *Sicherheitsorientierung* als typisch für Hochleistende genannt werden, scheinen in Bezug auf mathematische Exzellenz vor allem Charakteristika wie *Kreativität*, *Neugierde*, *Intuition* und *gedankliche Flexibilität* maßgeblich.

In gewisser Hinsicht zeigt sich dies auch in der Auswertung der Schüler/innen-Fragebogenergebnisse aus dem Abschnitt (IV) zur Selbsteinschätzung:

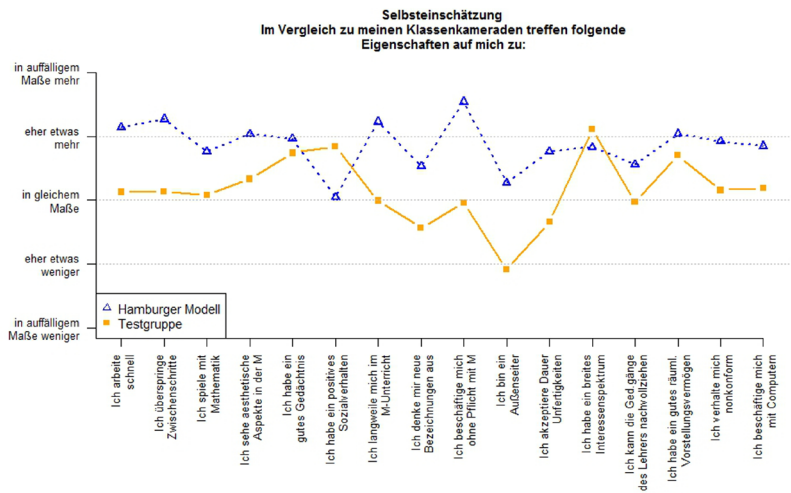


Abb. 2: Selbsteinschätzung von Hochleistenden („Testgruppe“) und potenziell Begabten („Hamburger Modell“), entnommen aus Brandl & Barthel (2012, Fig. 3) bzw. Barthel (2011, Abb. 2).

Die (historische Vergleichs-)Gruppe der potenziell mathematisch Begabten aus Kießwetter (1992) schätzt sich bezüglich fast aller Aspekte positiver ein als die Gruppe der Hochleistenden. Die Ausnahmen („Ich habe ein positives Sozialverhalten“ und „Ich habe ein breites Interessenspektrum“) sowie andere Items (u.a. „Ich bin ein Außenseiter“) müssen im Sinne einer Vergleichbarkeit ohnehin vernachlässigt werden, da sie lediglich den Selektionsprozess des Internats (Soziales Assessmentcenter usw.) widerspiegeln. Im Folgenden werden wir (insbesondere in Abbildung 4) auf diese Items deswegen verzichten. Das (reduzierte) Diagramm zur Selbsteinschätzung der Teilnehmer/innen im „Hamburger Modell“ dient im Folgenden u.a. auch als „Fingerabdruck“ zur Suche nach entsprechend veranlagten Schüler/innen innerhalb der Gruppe der Hochleistenden. Zusätzlich werden werden

schiedene typische Charakteristika Mathematischer Begabung herangezogen, die ihrerseits eigene Teilstichproben definieren:

- a) Neben Fähigkeiten zu Erwerb, Anwendung und Bewahrung mathematischer Spezifika listet Kruteskii (1976) als Resultat einer noch immer repräsentativen Längsschnittstudie eine vierte Komponente auf: „Mathematical cast of mind [...]. It is expressed in a selectively positive attitude toward mathematics, the presence of deep and valid interests in the appropriate area, a striving and a need to study it, and an ardent enthusiasm for it.“ (ebd., 345) Derselben Meinung scheint der Mathematiker Kurt Devlin zu sein, wenn er in „Das Mathe-Gen“ von der essentiellen Bedeutung von **Interesse** spricht: „Was immer dieses Interesse verursacht,

es ist genau dieses Interesse an Mathematik, was den Hauptunterschied zwischen denen ausmacht, die Mathematik ‚können‘, und denen, die es ‚nicht können‘“ (Devlin 2001, 321).

- b) Sehr bekannt (zumindest unter Mathematikern) ist die Äußerung des verstorbenen britischen Zahlentheoretikers Hardy, dass es in der Welt keinen Platz für hässliche Mathematik gibt: „The mathematician’s patterns, like the painter’s or the poet’s, must be beautiful; the ideas, like the colours or the words, must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics“ (Hardy 1940, 24f). Genauso sieht es der berühmte Mathematiker Henri Poincaré, wenn er schreibt: „Man wird es verstehen, wenn man sich das Gefühl für die mathematische Schönheit vergegenwärtigt, das Gefühl für die Harmonie der Zahlen und Formen, für die geometrische Eleganz. Das ist ein wahrhaft ästhetisches Gefühl, welches allen wirklichen Mathematikern bekannt ist“ (Poincaré 1973, 48). Dieses **ästhetische Gefühl** wird auch von Kruteskii attestiert: „This experience of the elegance of a solution was very characteristic of the capable pupils we observed ... their whole demeanor testified to the aesthetic feeling they were experiencing“ (Kruteskii, 1976, 347).

- c) Folgt man hingegen u.a. Dieudonné, so betont dieser den Spiel-Charakter der Mathematik(er): „Statt mehr oder weniger phantastische Gründe an den Haaren herbei zu ziehen, braucht man doch nur um sich zu blicken, um zu erkennen, welchen universellen

Reiz seit den frühesten Zeiten Spiele auf die Neugierde des Menschen ausgeübt [...] haben: Rätsel, Denksportaufgaben aller Art, ‚Puzzles‘ ...“ (Dieudonné 1985, 11). Ähnliche Beschreibungen findet man bei Poincaré und Hadamard. In dem 2010 auf Deutsch mit dem Titel „Wie Mathematiker ticken“ erschienenen Buch „The Mathematician’s Brain“ von David Ruelle wird dieses **Spiele**n unter Rückgriff auf Kantorovich (1993) mit dem englischen Wort „tinkering“ bezeichnet und als wesentlichste Eigenschaft erachtet.

Gemäß diesen Beschreibungen wurden aufgrund hoher Werte der entsprechenden definierenden Eigenschaften in den Teilen (III) und (IV) des Fragebogens Untergruppen der Stichprobe gebildet: „Interesse“, „Ästhetik“ und „Spiele“. Um diese Gruppen zu vergleichen, dienten die Interessensprofile der Schüler/innen in Teil (II) des Fragebogens. Abbildung 3 zeigt die relativen Interessens-Häufigkeits-Tripel der drei Untergruppen als Koordinaten eines dreidimensionalen Koordinatensystems.

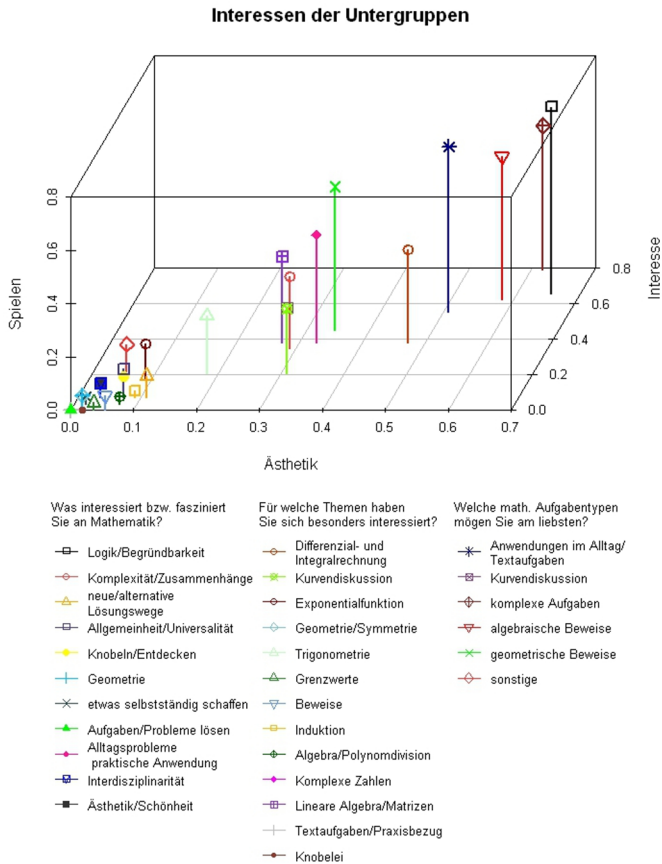


Abb. 3: Interessensausprägungen der Untergruppen, entnommen aus Brandl & Barthel (2012, Fig. 4) bzw. Barthel (2011, Abb. 5).

Alleine aus der grafischen Darstellung ist die starke Korrelation der drei Interessensprofile ersichtlich. Gleichzeitig repräsentieren die drei gewählten Untergruppen nicht dieselbe Menge an Individuen, da sie sich paarweise nur jeweils zu einem Drittel und gemeinsam zu lediglich 15 % überschneiden (vgl. Brandl & Barthel 2012, Table 1).

Ein anderer Weg, um potenziell mathematisch Begabte zu identifizieren, ist der weiter oben bereits angesprochene „Fingerabdruck“ des „Hamburger Mo-

dells“. Fordert man hohe Werte bei „Ich überspringe Zwischenschritte“ – ein Item, das ebenfalls bei Kruteskii als „the ability to curtail the process of mathematical reasoning and the system of corresponding operations; the ability to think in curtailed structures“ (Kruteskii, 1976, 350) beschrieben wird –, und bei „Ich beschäftige mich ohne Pflicht mit Mathematik“, so erhält man eine Kurve für die neue Untergruppe „**Selbständig**“, die sehr nahe an der des „Hamburger Modells“ zu liegen kommt:

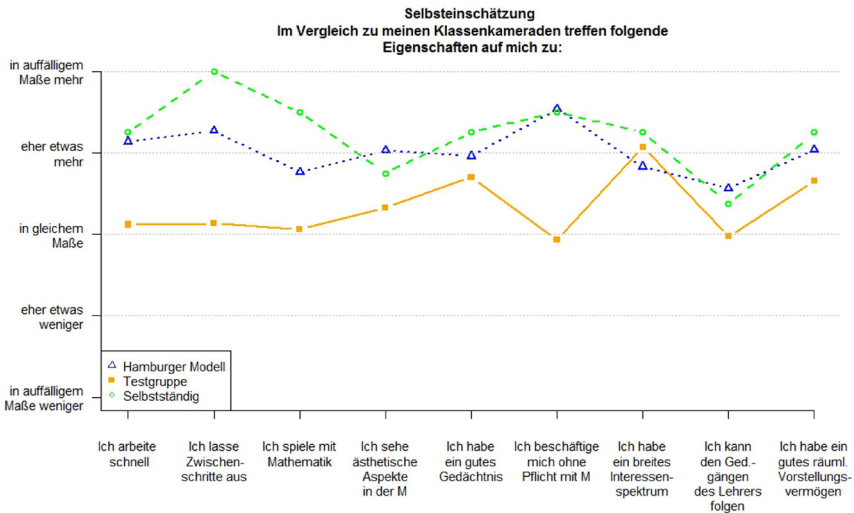


Abb. 4: Selbsteinschätzungs-Profile (gekürzt) der „Testgruppe“, des „Hamburger Modells“ und der Untergruppe „Selbständig“, entnommen aus Brandl & Barthel (2012, Fig. 5) bzw. Barthel (2011, Abb. 7).

Eine – in Hinsicht auf den in Abbildung 1 unterstellten theoretischen Zusammenhang zwischen einem Begabungspotenzial und hoher Leistung in Mathematik interessante – Untersuchung des Lei-

stungsspektrums der unterschiedlichen Gruppen ergibt das folgende Bild:



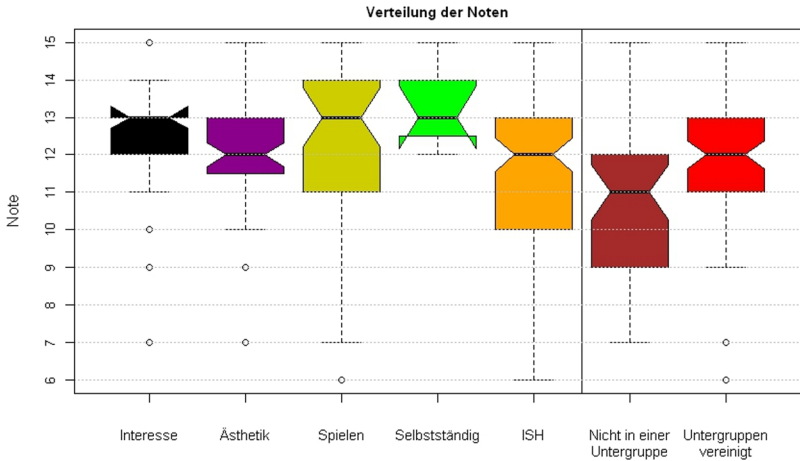


Abb. 5: Vergleichende Boxplots zur Noten- bzw. Punktverteilung in den Untergruppen und der gesamten Stichprobe, entnommen aus Brandl & Barthel (2012, Fig. 6) bzw. Barthel (2011, Abb. 9).

## Diskussion

Bereits die Antworten aus den Lehrer/innen-Interviews zeigen deutlich, dass es sich in Hinblick auf das theoretisch zugrunde gelegte Schema (Abbildung 1) tatsächlich um zunächst unterschiedliche Gruppen von potenziell Begabten einerseits und tatsächlich Hochleistenden andererseits handelt. Die vergleichende Gegenüberstellung zweier Persönlichkeitsprofile in Abbildung 2 unterstreicht diesen Unterschied ebenfalls. Abbildung 1 impliziert allerdings auch, dass sich innerhalb der Menge der Hochleistenden mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler ausfindig machen lassen sollten. Hierfür bedarf es einschlägiger Charakteristika, wie sie für die Untergruppen „Interesse“, „Ästhetik“, „Spielen“ und „Selbstständig“ gewählt wurden. Für die ersten drei Untergruppen zeigt sich in Abbildung 3 ein identisches Interessensprofil. Dies bestätigt

zum einen eine Verwandtschaft der in der Literatur als mathematisch begabt angesehenen Individuen. Zum anderen ermöglicht dieses Ergebnis nicht nur die Identifikation potenziell mathematisch begabter Schülerinnen und Schüler gemäß der entsprechenden Charakteristika, sondern auch die effiziente Entwicklung von Fördermaterialien, die für *alle* bzw. einen Großteil der mathematisch Begabten geeignet erscheinen. Die Untergruppe „Selbstständig“ repräsentiert dabei diejenigen hochleistenden Schülerinnen und Schüler, die in Bezug auf ihr Persönlichkeitsprofil dem historischen Profil mathematisch begabter Schülerinnen und Schüler aus dem „Hamburger Modell“ sehr nahe kommen (vgl. Abbildung 4). Wirft man einen Blick auf deren Leistungsspektrum (in Abbildung 5), so zeigt sich, dass die Untergruppe „Selbstständig“ enorm hochleistende Individuen enthält. Bei den Leistungsspektren der anderen Untergruppen zeigt

sich ein ähnliches Bild. Somit bestätigt sich die naheliegende Vermutung, dass die – nach klassischen Merkmalen ausgewählten – mathematisch begabten Schülerinnen und Schüler für den obe-

ren Teil des Leistungsspektrums der Stichprobe (der ohnehin schon hochleistenden Schülerinnen und Schüler) verantwortlich zeichnen.

## Literatur

- Barthel, C. (2011). Ein psychometrisches Profil hochleistender und hochbegabter Schülerinnen und Schüler in Mathematik. *Schriftliche Hausarbeit* gem. § 30 LPO I in Didaktik der Mathematik (Betreuer: Prof. Dr. M. Brandl) an der Universität Passau.
- Brandl, M. (2011a). A Constructive Approach to the Concept of Mathematical Giftedness based on Systems Theory. In M. Avotiņa, D. Bonka, H. Meissner, L. Ramāna, L. Sheffield, E. Velikova (Eds.), *Proceedings of the 6th International conference on Creativity in Mathematics Education and the Education of Gifted Students* (S. 35-39). University of Latvia, Riga, Latvia / Angel Kanchev University of Ruse, Ruse, Bulgaria.
- Brandl, M. (2011b). Manifestation mathematischer Begabung an einem Oberstufen-Internat für Hochleistende. In R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011* (139-142). Münster: WTM-Verlag.
- Brandl, M. (2011c). High attaining versus (highly) gifted pupils in mathematics: a theoretical concept and an empirical survey. In M. Pytlak, E. Swoboda, T. Rowland (Eds.), *CERME 7 – Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 1044-1055). University of Rzeszów.
- Brandl, M. & Barthel, C. (2012). A comparative profile of high attaining and gifted students in mathematics. In *Pre-Proceedings of ICME-12* (The 12th International Congress on Mathematical Education), 1429-1438.
- Brocke, B. & Beauducel, A. (2001). Intelligenz als Konstrukt. In E. Stern & J. Guthke (Hrsg.), *Perspektiven der Intelligenzforschung* (S. 13-42). Lengerich: Pabst Science Publishers.
- Devlin, K. (2001). *Das Mathe-Gen. Oder wie sich das mathematische Denken entwickelt und warum Sie Zahlen ruhig vergessen können*. Stuttgart: J. G. Cotta'sche Buchhandlung Nachfolger.
- Dieudonné, J. (1985). *Geschichte der Mathematik 1700 – 1900. Ein Abriss*. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn. Lizenzausgabe für die Deutsche Demokratische Republik und die übrigen sozialistischen Länder.
- Hardy, G. H. (1940). *A Mathematicians Apology*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Kantorovich, A. (1993). *Scientific Discovery: Logic and Tinkering*. Albany: State University of New York.
- Kießwetter, K. (1992). „Mathematische Begabung“ als Element des Weltbildes kompetenter Mathematiklehrer und Schüler – ausgewählte Ergebnisse aus einem DFG-Projekt. *MU 38* (11), 54-60.
- Kruteskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in School-*

*children*. Chicago, London: University of Chicago Press.

Liepmann, D., Beauducel, A., Brocke, B., Amthauer, R. (2007). *Intelligenz-Struktur-test 2000 R (I-S-T 2000 R). Manual* (2. Ed.). Göttingen: Hogrefe.

Poincaré, H. (1996). *Science And Method. Reprint of the 1914 edition*. London: Routledge.

Ruelle, D. (2007). *The mathematician's brain*. Princeton University Press.

Sternberg, R. J. (1996). What is Mathematical Thinking? In: R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.), *The nature of mathematical thinking* (S. 303-318). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Ass. Publishers.

Ulm, V. (2010). Mathematisches Denken und Mathematische Begabung. In V. Ulm (Hrsg.), *Mathematische Begabungen fördern* (S. 3-7). Berlin: Cornelsen Scriptor.



## Prof. Dr. Matthias Brandl

**Universität:** Passau  
Fakultät für Informatik und Mathematik -  
Didaktik der Mathematik  
**Anschrift:** Innstr. 33, 94032 Passau  
**Tel:** 0851/509-3175  
**E-Mail:** matthias.brandl@uni-passau.de

### Zur Person:

Dr. rer. nat, Dipl-Math., Gymnasiallehrer für Mathematik u. Physik (Lehramts-assessor), Inhaber der Professur für Didaktik der Mathematik (Lehrprofessur) und Mitglied im Leitungsgremium der Lehr- und Forschungseinheit „Lehramtsausbildung Mathematik und Informatik“ an der Fakultät für Informatik und Mathematik der Universität Passau

### Arbeits- bzw. Forschungsschwerpunkte:

Mathematische Begabung (theoretische Fundierung, empirische Erhebung u. praktische Förderung), Vernetzungen in der Mathematik und im Mathematikunterricht, Narrative Didaktik; Sekundarstufe I und II